

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado

Segundo Semestre de 2021

Mecânica Clássica

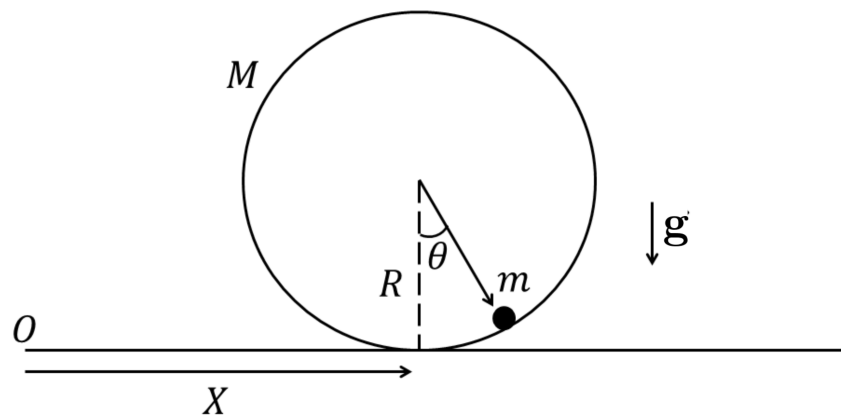
30/09/2021 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

QUESTÃO 1 – MECÂNICA LAGRANGIANA E PEQUENAS OSCILAÇÕES

Considere um anel circular de espessura desprezível, raio R e com uma massa M distribuída uniformemente ao longo de sua circunferência, conforme figura abaixo. O anel está livre para rolar sem escorregar ao longo de uma superfície horizontal. Uma partícula pontual de massa m tem seu movimento restrito ao deslizamento sem atrito ao longo do perímetro interno do anel. O sistema está sob uma aceleração gravitacional uniforme \mathbf{g} .

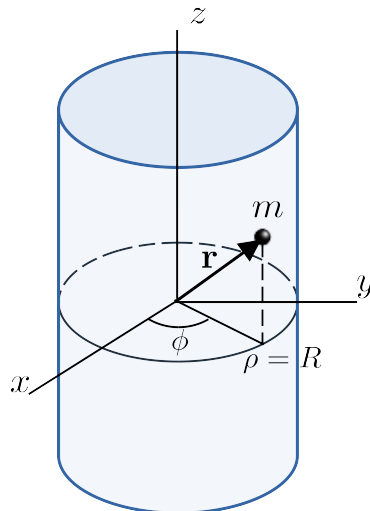


Considerando as coordenadas generalizadas X e θ representadas na figura, determine:

- (a) (30%) A lagrangiana do sistema formado pelo anel e a partícula;
- (b) (30%) As equações de movimento para as coordenadas X e θ (você não precisa resolver as equações encontradas);
- (c) (10%) As possíveis posições de equilíbrio estático da partícula.
- (d) (30%) Encontre a frequência de oscilação de pequena amplitude da partícula em torno da posição de equilíbrio estável. Considere o limite $m \ll M$.

QUESTÃO 2 – MECÂNICA HAMILTONIANA

O movimento de uma partícula de massa m está restrito à superfície cilíndrica de raio R ilustrada na figura abaixo, onde também estão indicados sistemas de coordenadas cartesianas (xyz) e cilíndricas $(\rho\phi z)$, com a coordenada z sendo o eixo de simetria da superfície. A partícula está submetida a uma força $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, onde k é uma constante e \mathbf{r} é a posição da partícula. Não há atrito entre a partícula e a superfície.



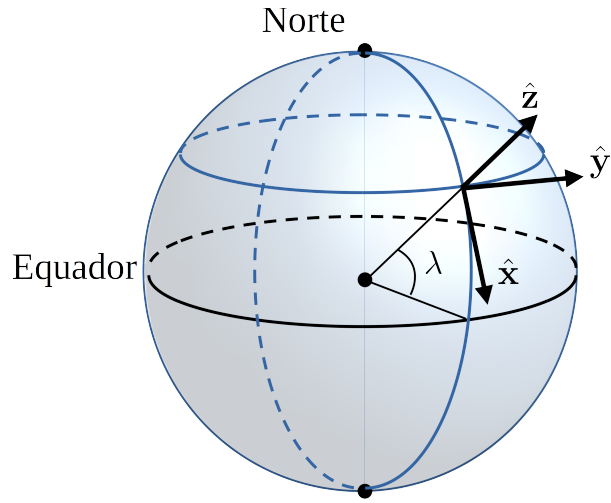
- (a) (20 %) Escreva a energia cinética T e a energia potencial U da partícula em termos das coordenadas generalizadas ϕ e z , além das respectivas velocidades generalizadas. Adote $U = 0$ para $z = 0$.
- (b) (25 %) Determine o lagrangiano da partícula e os momentos conjugados às coordenadas ϕ e z .
- (c) (20 %) Use a transformada de Legendre para obter o hamiltoniano.
- (d) (35 %) Determine as equações de movimento canônicas para as coordenadas da partícula e, a partir delas, obtenha $z = z(\phi)$.

QUESTÃO 3 – FORÇA DE CORIOLIS

Nesta questão discutiremos o movimento de uma partícula para um observador fixo à superfície da Terra, considerando os efeitos da força inercial de Coriolis, dada por:

$$\mathbf{F} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega},$$

onde \mathbf{v} é a velocidade da partícula medida no referencial girante e $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular deste referencial. Considere a Terra como uma esfera perfeita com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, como ilustrado na figura ao lado, e despreze efeitos da força inercial centrífuga. A origem do sistema de coordenadas (xyz) da figura se encontra em uma latitude λ Norte, o versor $\hat{\mathbf{z}}$ é perpendicular à superfície da Terra, o versor $\hat{\mathbf{x}}$ aponta para o Sul e o versor $\hat{\mathbf{y}}$ para o Leste. Suponha que uma partícula seja abandonada de uma altura $z = h$ em $x = 0$ e $y = 0$, na latitude λ . A aceleração de queda livre é $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$, com $g > 0$. Despreze a resistência do ar.



- (a) (40%) Escreva as acelerações da partícula nas direções x , y e z considerando a força de Coriolis e sem realizar aproximações.
- (b) (30%) Obtenha a trajetória da partícula $(x(t), y(t), z(t))$ em 1ª ordem em ω . Para isso, primeiro resolva as equações do item (a) fazendo $\omega = 0$ para encontrar a solução em ordem zero. Em seguida, resolva as mesmas equações do item (a) com $\omega \neq 0$ e com as componentes das velocidades em ordem zero.
- (c) (20%) Determine a posição no plano xy em que a partícula atinge o solo. O desvio em relação ao ponto $x = 0$ e $y = 0$ ocorre para qual direção (Norte, Sul, Leste ou Oeste)?
- (d) (10%) Uma partícula é abandonada de uma altura $h = 100$ m no Equador. Estime o desvio total sofrido pela partícula devido à Força de Coriolis, ou seja, a distância do ponto $x = 0$ e $y = 0$ ao ponto em que a partícula atinge o solo. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$.

QUESTÃO 4 – TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS E EQUAÇÃO DE HAMILTON-JACOBI

Considere a hamiltoniana

$$H = e^{-\lambda t} \frac{p^2}{2m} + e^{\lambda t} \frac{m\omega^2 q^2}{2},$$

onde m é a massa de uma partícula e t o tempo, enquanto λ e ω são constantes.

- (a) (20%) Encontre a transformação canônica $Q = Q(q, t)$ e $P = P(p, t)$ associada à função geradora $F_2(q, P, t) = e^{\lambda t/2} qP$.
- (b) (20%) Encontre a hamiltoniana transformada $K(Q, P, t)$ e a equação de Hamilton-Jacobi associada à $K(Q, P, t)$.
- (c) (30%) Resolva a equação de Hamilton-Jacobi do item (b) considerando uma solução na forma $S = W(Q) - \alpha t$. Deixe sua resposta em termos de uma integral do tipo $\int dQ \sqrt{1 - C^2 Q^2}$, onde C é uma constante dependente dos parâmetros m , ω , λ e α .
- (d) (30%) Considerando $\lambda < 2\omega$ e a integral

$$\int \frac{dQ}{\sqrt{1 - C^2 Q^2}} = \frac{1}{C} \arcsen(CQ),$$

obtenha $Q = Q(t)$ e, em seguida, $q = q(t)$.